BAB II

KAJIAN TEORI

Berikut diberikan landasan teori mengenai teori himpunan *fuzzy*, program linear, metode simpleks, dan program linear *fuzzy* untuk membahas penyelesaian masalah menggunakan metode *fuzzy decisive set* pada bab selanjutnya.

A. Teori Himpunan *Fuzzy*

1. Himpunan Tegas

Himpunan tegas merupakan himpunan yang menyatakan secara tegas keanggotaan dari anggota himpunan. Himpunan tegas A dengan anggota $a_1, \dots, a_n$ dapat didefinisikan dengan cara mendaftar anggota himpunan $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ atau dengan cara aturan $A = \{x | x \in A\}$. Jika $a \in A$, maka derajat keanggotaan a pada himpunan A adalah 1. Namun, jika $a \notin A$, maka derajat keanggotaan a pada himpunan A adalah 0. (Sri Kusumadewi, 2002).

Berikut akan diberikan tiga buah himpunan tinggi badan seseorang.

Contoh 2.1

Untuk 3 buah himpunan tinggi badan yaitu $PENDEK = \{x | x < 150\}$, $KURANG\ TINGGI = \{x | 150 \leq x \leq 160\}$, dan $TINGGI = \{x | x > 160\}$. Seseorang dengan tinggi badan 149 cm, merupakan anggota himpunan PENDEK, dengan derajat keanggotaan adalah 1 dan bukan merupakan anggota himpunan KURANG TINGGI maupun TINGGI dengan derajat keanggotaan masing-masing adalah 0. Seseorang dengan tinggi badan 150 cm, bukan merupakan anggota himpunan PENDEK dengan derajat keanggotaan 0 atau merupakan anggota komplemen dari himpunan PENDEK.

2. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* pertama kali dikembangkan pada tahun 1965 oleh Zadeh sebagai perluasan dari pengertian himpunan tegas. Himpunan *fuzzy* adalah himpunan yang anggotanya memiliki derajat keanggotaan bilangan real pada selang [0,1].

Definisi 2.1. (Zimmermann, 2001: 11) *Misalkan X adalah koleksi dari objek-objek yang dinotasikan dengan x, suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam X adalah suatu himpunan pasangan berurutan $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ adalah derajat keanggotaan x di $\tilde{A}$ pada selang* [0,1].

Dengan demikian, himpunan *fuzzy* adalah himpunan pasangan berurutan dengan elemen pertama adalah elemen himpunan sedangkan elemen kedua adalah derajat keanggotaan dari elemen himpunan tersebut. Himpunan *fuzzy* juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi keanggotaan. Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah fungsi yang memasangkan setiap anggota himpunan dengan tepat suatu derajat keanggotaan atau dapat disebut dengan derajat keanggotaan berupa suatu bilangan pada selang antara 0 sampai dengan 1.

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* TINGGI.

Contoh 2.2

Suatu himpunan *fuzzy* TINGGI dapat disusun dengan fungsi keanggotaan TINGGI sebagai berikut:

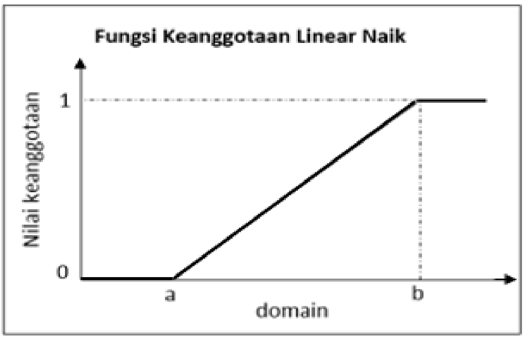
$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x < 150 \\ \dfrac{x-150}{10}; & 150 \leq x \leq 160 \\ 1; & x > 160 \end{cases}$$

Seseorang yang memiliki tinggi badan 158 cm merupakan anggota himpunan TINGGI dengan $\mu_{TINGGI}(158) = 0.8$ dapat pula diartikan secara verbal tinggi badannya mendekati tinggi. Seseorang yang memiliki tinggi badan 152 cm merupakan anggota himpunan TINGGI dengan $\mu_{TINGGI}(152) = 0.2$ dapat pula diartikan secara verbal tinggi badannya kurang tinggi. Seseorang yang memiliki tinggi badan 165 cm merupakan anggota himpunan TINGGI dengan $\mu_{TINGGI}(165) = 1$ dan seseorang yang memiliki tinggi badan 145 cm bukan merupakan anggota himpunan TINGGI dengan $\mu_{TINGGI}(145) = 0$.

Beberapa fungsi keanggotaan *fuzzy* yang dikenal dalam himpunan *fuzzy* yaitu:

1.1 Fungsi Keanggotaan Linear

Himpunan *fuzzy* mempunyai dua bentuk fungsi keanggotaan linear, yang pertama fungsi keanggotaan linear naik dimulai dari derajat keanggotaan 0 ke kanan menuju 1.



Gambar 2.1 Fungsi Keanggotaan Linear Naik

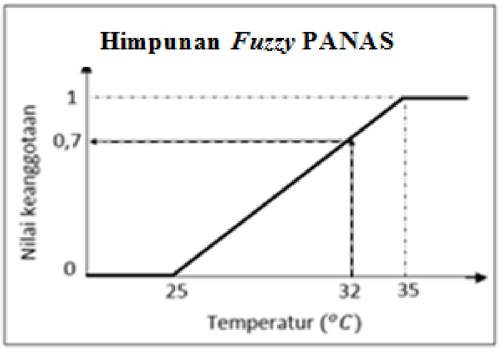
Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ pada Gambar 2.1 dinyatakan dengan sebuah fungsi keanggotaan linear naik $(x; a, b)$ sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right); & a \leq x \leq b \\ 1; & x \geq b \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* PANAS dengan fungsi keanggotaan linear naik.

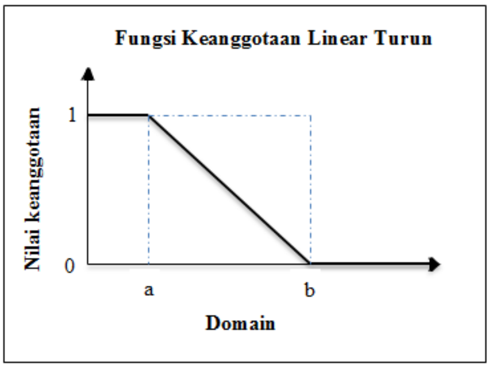
Contoh 2.3.

Himpunan *fuzzy* PANAS untuk temperatur ruangan pada Gambar 2.2 dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi keanggotaan linear naik $(x; 25, 35)$. Untuk ruangan dengan temperatur 32 derajat, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{PANAS}(32) = \frac{(32-25)}{(35-25)} = 0.7$.



Gambar 2.2 Himpunan *fuzzy* PANAS

Bentuk kedua dari himpunan *fuzzy* yaitu dengan fungsi keanggotaan linear turun dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah.



Gambar 2.3 Fungsi Keanggotaan Linear Turun

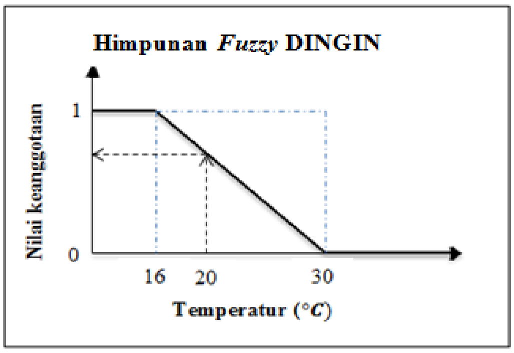
Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ pada Gambar 2.3 dinyatakan dengan sebuah fungsi keanggotaan linear turun $(x; a, b)$ sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{b-x}{b-a}\right); & a \le x \le b \\ 0; & x \ge b \end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* DINGIN dengan fungsi keanggotaan linear turun.

Contoh 2.4

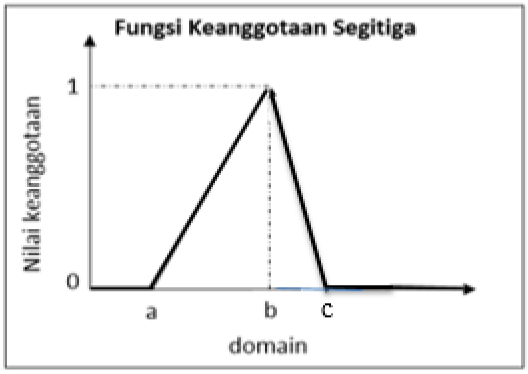
Himpunan *fuzzy* DINGIN untuk temperatur ruangan pada Gambar 2.4 dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi keanggotaan linear turun $(x; 16, 30)$. Untuk ruangan dengan temperatur 20 derajat, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{DINGIN}(20) = \frac{30-20}{30-16} = 0.667$.



Gambar 2.4 Himpunan *fuzzy* DINGIN

1.2 Fungsi Keanggotaan Segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga merupakan gabungan dari dua fungsi keanggotaan linear. Fungsi keanggotaan segitiga $(x; a, b, c)$ mempunyai tiga buah parameter $a, b, c \in R$ dengan $a < b < c$ (Susilo, 2006).



Gambar 2.5 Fungsi Keanggotaan Segitiga

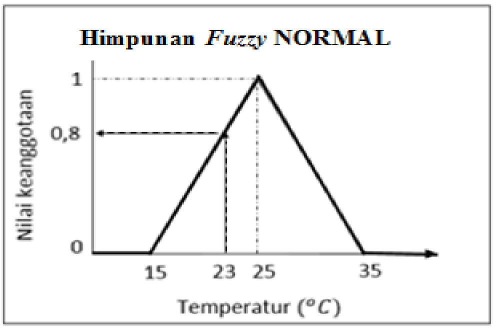
Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ pada Gambar 2.5 dinyatakan dengan sebuah fungsi keanggotaan segitiga $(x; a, b, c)$ sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x < a \text{ atau } x > c \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right); & a \le x \le b \\ \left(\frac{c-x}{c-b}\right); & b \le x \le c \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* NORMAL dengan fungsi keanggotaan segitiga.

Contoh 2.5

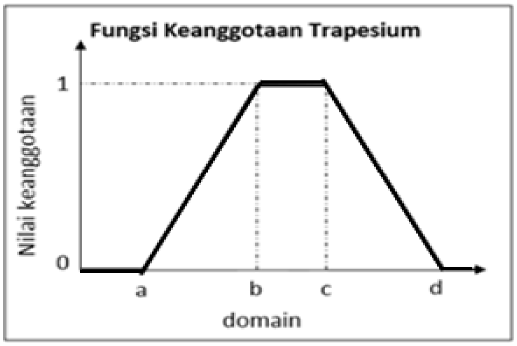
Himpunan *fuzzy* NORMAL untuk temperatur ruangan pada Gambar 2.6 dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi keanggotaan segitiga $(x; 15, 25, 35)$. Ruangan dengan temperatur 23 derajat, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{NORMAL}(23) = \frac{25-15}{35-15} = 0.8$.



Gambar 2.6 Himpunan *Fuzzy* NORMAL

1.3 Fungsi Keanggotaan Trapesium

Fungsi keanggotaan trapesium merupakan pengembangan fungsi keanggotaan segitiga dengan beberapa titik yang memiliki derajat keanggotaan sama dengan 1. Fungsi keanggotaan trapesium $(x; a, b, c, d)$ mempunyai empat buah parameter $a, b, c, d \in R$ dengan $a < b < c < d$ (Susilo, 2006).



Gambar 2.7 Fungsi Keanggotaan Trapesium

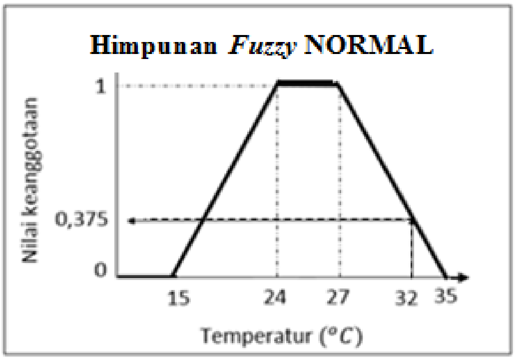
Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ pada Gambar 2.7 dinyatakan dengan sebuah fungsi keanggotaan trapesium $(x; a, b, c, d)$ sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x < a \text{ atau } x > d \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right); & a \leq x \leq b \\ 1; & b \leq x \leq c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right); & c \leq x \leq d \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* NORMAL dengan fungsi keanggotaan trapesium.

Contoh 2.6

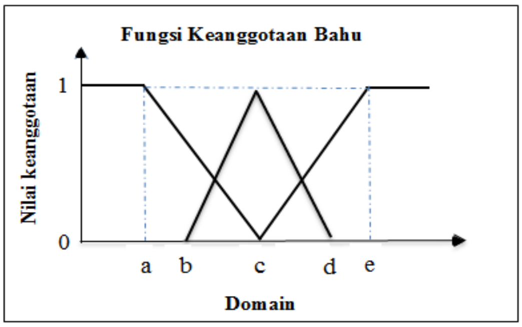
Himpunan *fuzzy* NORMAL untuk temperatur ruangan pada Gambar 2.8 dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi keanggotaan trapesium $(x; 15, 24, 27, 35)$. Ruangan dengan temperatur 32 derajat, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{NORMAL}(32) = \frac{35-32}{35-27} = 0.375$.



Gambar 2.8 Himpunan *Fuzzy* NORMAL

1.4 Fungsi Keanggotaan Bahu

Fungsi keanggotaan bentuk bahu dapat berupa kombinasi dua fungsi keanggotaan segitiga dan trapesium.



Gambar 2.9 Fungsi Keanggotaan Bahu

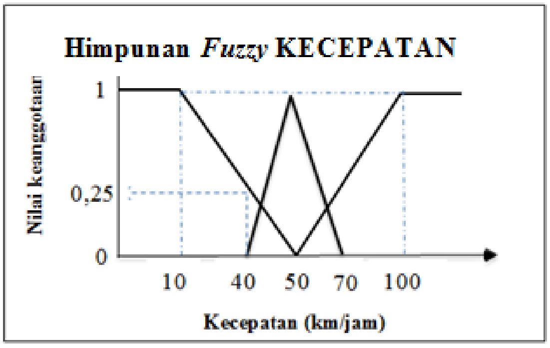
Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ pada Gambar 2.9 dinyatakan dengan sebuah fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{c-x}{c-a}\right); & a \leq x \leq c \\ \left(\frac{x-b}{c-b}\right); & b \leq x \leq c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right); & c \leq x \leq d \\ \left(\frac{x-c}{e-c}\right); & c \leq x \leq e \\ 1; & x < a \text{ dan } x > e \end{cases} \quad \textbf{(2.5)}$$

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* KECEPATAN dengan fungsi keanggotaan bahu.

Contoh 2.7

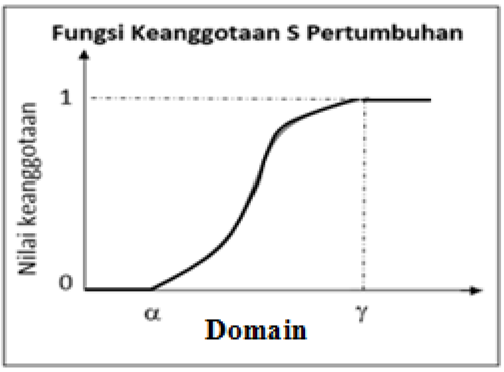
Berikut diberikan himpunan *fuzzy* KECEPATAN pada Gambar 2.10 dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi keanggotaan bahu. Kecepatan dengan tiga himpunan yaitu, PELAN= $\{x | 10 \leq x \leq 50\}$, SEDANG= $\{x | 40 \leq x \leq 70\}$, dan CEPAT= $\{x | 50 \leq x \leq 100\}$. Fungsi keanggotaan untuk kecepatan motor yaitu $\mu_{PELAN}(40) = \frac{50-40}{50-10} = 0.25$ dan $\mu_{SEDANG}(40) = \frac{40-40}{50-40} = 0$.



Gambar 2.10 Himpunan *Fuzzy* KECEPATAN

1.5 Fungsi Keanggotaan S

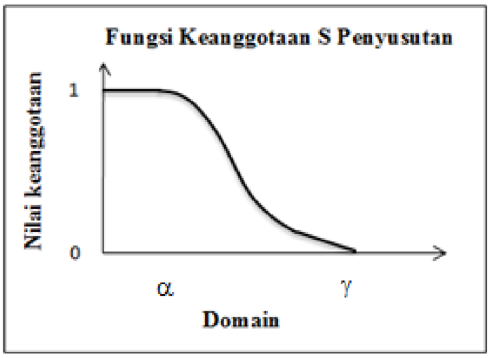
Fungsi keanggotaan S memiliki bentuk permukaan tak linear yang bergerak dari sisi kiri dengan derajat keanggotaan sama dengan 0 ke sisi kanan dengan derajat keanggotaan sama dengan 1. Terdapat dua jenis fungsi keanggotaan S yaitu fungsi keanggotaan S untuk pertumbuhan dan fungsi keanggotaan S untuk penyusutan. Fungsi keanggotaan S didefinisikan menggunakan tiga parameter yaitu α, β, dan γ.



Gambar 2.11 Fungsi Keanggotaan S Pertumbuhan

Fungsi keanggotaan pada fungsi keanggotaan S pertumbuhan adalah sebagai berikut :

$$\mu(x) = S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0; & x < \alpha \\ 2\left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2; & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 - 2\left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2; & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1; & x > \gamma \end{cases} \qquad \textbf{(2.6)}$$



Gambar 2.12 Fungsi Keanggotaan *S* Penyusutan

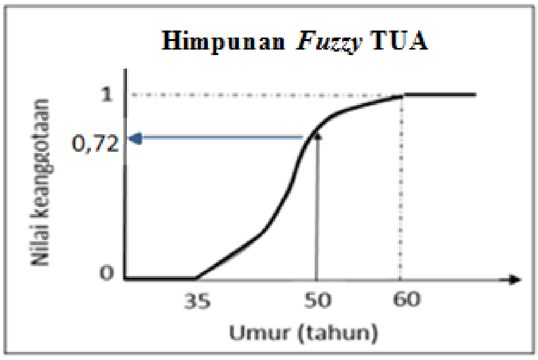
Fungsi keanggotaan pada fungsi keanggotaan *S* penyusutan adalah sebagai berikut :

$$\mu(x) = S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 1; & x < \alpha \\ 1 - 2\left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2; & \alpha \le x \le \beta \\ 2\left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2; & \beta \le x \le \gamma \\ 0; & x > \gamma \end{cases} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Berikut akan diberikan himpunan *fuzzy* TUA dengan fungsi keanggotaan kurva *S* pertumbuhan.

Contoh 2.8

Himpunan *fuzzy* TUA pada variabel umur untuk kurva *S* pertumbuhan pada Gambar 2.13. Untuk contoh umur 50 pada himpunan TUA, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{TUA}(50) = 2\left(\frac{50-35}{60-35}\right)^2 = 0.72$.

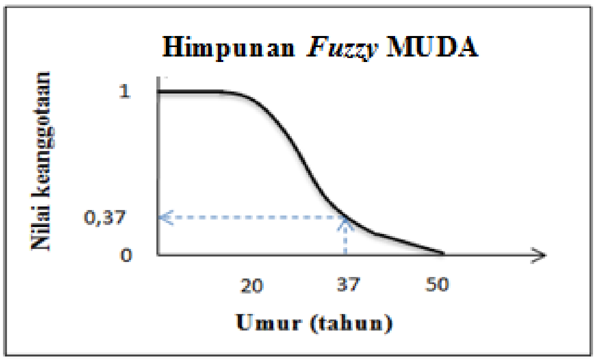


Gambar 2.13 Himpunan *Fuzzy* TUA

Berikut akan diberikan contoh himpunan *fuzzy* MUDA denga fungsi keanggotaan kurva *S* penyusutan.

Contoh 2.9

Himpunan *fuzzy* MUDA pada variabel umur untuk kurva *S* penyusutan pada Gambar 2.14. Untuk contoh umur 37 pada himpunan MUDA, memiliki derajat keanggotaan yaitu $\mu_{MUDA}(37) = 2\left(\frac{50-37}{50-20}\right)^2 = 0.376$.



Gambar 2.14 Himpunan *Fuzzy* MUDA

3. Operator-operator *Fuzzy*

Terdapat tiga operator pada himpunan *fuzzy* yaitu irisan, gabungan, dan komplemen.

a. Komplemen Himpunan *Fuzzy*

Komplemen dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $\tilde{A}'$. Bentuk umum himpunan diperlihatkan dengan derajat keanggotaan yang tidak terdapat pada himpunan $\tilde{A}$.

Berikut akan diberikan contoh komplemen himpunan *fuzzy*.

Contoh 2.10

Himpunan $\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.4)\}$. Komplemen dari $\tilde{A}$ adalah $\tilde{A}' = \{(1,0.8), (2,0.6)\}$.

Definisi 2.2. (Zimmermann, 2001: 17) *Fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ komplemen, $\mu_{\tilde{A}'}(x)$ didefinisikanoleh $\mu_{\tilde{A}'}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$.*

b. Irisan Himpunan *Fuzzy*

Irisan dua himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \cap \tilde{B}$. Irisan ekuivalen dengan operasi aritmatika dan logika AND.

Berikut akan diberikan contoh irisan dua himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Contoh 2.11

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.4), (3,0.3)\}$ dan $\tilde{B} = \{(1,0.1), (2,0.5), (3,0.2)\}$ Irisan himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ atau $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ adalah $\tilde{C} = \{(1,0.1), (2,0.4), (3,0.2)\}$.

Definisi 2.3. (Zimmermann, 2001: 17) *Fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{C}}(x)$ dari himpunan $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ adalah $\mu_{(\tilde{C})}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ untuk semua $x \in X$.*

Menurut George J. Klir (1997) irisan dari himpunan $\tilde{A}$ dan komplemennya $\tilde{A}'$ adalah himpunan kosong atau $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \emptyset$.

c. Gabungan Himpunan *Fuzzy*

Gabungan dua himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} \cup \tilde{B}$. Gabungan ekuivalen dengan operasi aritmatika dan logika OR.

Berikut akan diberikan contoh gabungan dua himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Contoh 2.12

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.4)\}$ dan $\tilde{B} = \{(1,0.1),(2,0.5)\}$. Gabungan himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ atau $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ adalah $\tilde{D} = \{(1,0.2),(2,0.5)\}$.

Definisi 2.4. (Zimmermann, 2001: 17) *Fungsi keanggotaan* $\mu_{\tilde{D}}(x)$ *dari gabungan* $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ *didefinisikan oleh* $\mu_{(\tilde{D})}(x) = max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ *untuk semua* $x \in X$.

Gabungan dua himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang tidak mempunyai anggota yang sama maka $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ adalah $\emptyset$.

d. Himpunan $\alpha - cuts$

Dalam menyatakan suatu himpunan *fuzzy*, dapat juga dilakukan dengan menggunakan $\alpha - cuts$ yang merupakan himpunan bagian dari himpunan tegas dalam himpunan semesta dengan α adalah suatu bilangan dalam selang tertutup [0,1] (Li-Xin Wang, 1997).

Definisi 2.5 (Zimmermann, 2001: 14) *Anggota himpunan tegas pada himpunan fuzzy* $\tilde{A}$ *yang paling sedikit memiliki derajat keanggotaan* α *dikatakan himpunan* $\alpha - cuts$ $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Berikut akan diberikan contoh himpunan $\alpha - cuts$.

Contoh 2.13

Himpunan semesta $S = \{(1,0.1),(2,0.2),(3,0.3),(4,0.4)\}$ kemudian akan ditentukan himpunan bagian dengan derajat keanggotaan $\alpha = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}2$; dan $\alpha = 0{,}3$. Didapatkan,

$\tilde{A}_{0.1} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.1\} = \{1,2,3,4\}$

$\tilde{A}_{0.2} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.2\} = \{2,3,4\}$

$\tilde{A}_{0.3} = \{x \in S | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.3\} = \{3,4\}$

4. Bilangan *Fuzzy*

Menurut George J. Klir (1997) bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dengan fungsi keanggotaan :

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right); & a \leq x \leq b \\ 1; & b \leq x \leq c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right); & c \leq x \leq d \\ 0\ ; & x < a \text{ dan } x > d \end{cases} \tag{2.8}$$

dengan $a \leq b \leq c \leq \ d \in R$.

Definisi 2.6 (Nasseri, 2008: 1778) *Elemen himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dikatakan normal jika terdapat paling sedikit satu titik $x \in R$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.*

Definisi 2.7 (Nasseri, 2008: 1778) *Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ di R adalah konveks jika dan hanya jika $\mu_A(\ \lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ untuk setiap $x, y\ \in R$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$.*

Himpunan *fuzzy* dikatakan bilangan *fuzzy* apabila memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. Himpunan *fuzzy* normal.

   Bilangan *fuzzy* merupakan himpunan *fuzzy* normal yang mempunyai fungsi keanggotaan yang nilainya sama dengan 1 untuk $x = b$.

b. $\widetilde{A_\alpha}$ pada selang tertutup

   $\widetilde{A_\alpha}$ merupakan selang tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

c. Pendukung $\tilde{A}$ adalah selang terbuka di (a, d)

Pendukung (*support*) dari suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$, yang dilambangkan dengan $Supp(\widetilde{A})$, adalah himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan tak nol dalam $\tilde{A}$, yaitu $Supp(\widetilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ yang berada pada selang terbuka (a, d) pada bilangan real.

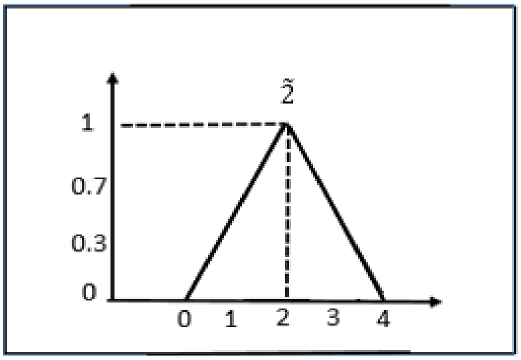
d. Himpunan $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* konveks.

Himpunan *fuzzy* dikatakan konveks apabila memenuhi bentuk $\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ untuk setiap $x, y \in R$ dan setiap $\lambda \in [0,1]$.

Berikut akan diberikan contoh bilangan *fuzzy*.

Contoh 2.14

Bilangan *fuzzy* kurang lebih 2 yang dapat dinyatakan sebagai himpunan *fuzzy* $\tilde{2}$ dengan fungsi keanggotaan segitiga $(x; 0, 2, 4)$.



Gambar 2.15. Bilangan *Fuzzy* $\tilde{2}$

Bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ bersifat normal, sebab mempunyai fungsi keanggotaan yang nilainya sama dengan 1 untuk $x = 2$. Bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ merupakan selang tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ dalam R. Pendukung dari himpunan *fuzzy* $\tilde{2}$ terbatas pada selang (0,4). Bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$

konveks, sebab untuk setiap sebarang $x \in \tilde{2}$ ambil 1 dan 3 dengan $\lambda = 0{,}5$ maka $\mu_A(0{,}5x1 + 0{,}5x3) \geq min(0{,}5; 0{,}5) \in \tilde{2}$. Dengan demikian, *2* merupakan bilangan *fuzzy*.

B. Program Linear

Dalam kehidupan sehari-hari tentu banyak terdapat permasalahan yang dihadapi oleh setiap orang, perusahaan, bahkan suatu negara. Salah satu bentuk penyelesaian masalah yang dapat digunakan adalah model program linear. Program linear sangat erat hubungannya dengan pengalokasian sumber daya baik berupa bahan baku, tenaga kerja, mesin, maupun modal. Semua sumber daya yang tersedia pada umumnya memiliki jumlah yang sangat terbatas. Oleh karena itu pengalokasiannya harus dilakukan dengan sebaik mungkin untuk mendapatkan hasil yang optimal (Zulian, 1991).

Menurut Zulian (1991) terdapat tiga langkah yang harus dilakukan untuk merumuskan model program linear, yaitu :

1. Menentukan variabel keputusan yang akan dicari,
2. Menentukan batasan dari variabel keputusan dalam bentuk persamaan linear atau pertidaksamaan linear,
3. Menentukan tujuan yang akan dicapai dari variabel keputusan yang sudah ditentukan.

Model pada program linear disusun oleh dua fungsi yaitu fungsi tujuan dan fungsi kendala. Fungsi tujuan merupakan fungsi linear yang menjelaskan permasalahan yang akan dicari solusi optimalnya. Fungsi kendala merupakan fungsi linear yang menyatakan batasan-batasan yang harus dipenuhi dalam mencapai solusi optimal.

Menurut B. Susanta (1994) bentuk umum dari program linear adalah,

Memaksimumkan

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \textbf{(2.9)}$$

dengan kendala :

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & (\leq, =, \geq) & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & (\leq, =, \geq) & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & (\leq, =, \geq) & b_m \end{array} \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \qquad \textbf{(2.11)}$$

dengan:

$x_1, x_2, \dots, x_n$: variabel keputusan.

$c_1, c_2, \dots, c_n$: koefisien ongkos

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$: koefisien teknis

$b_1, b_2, \dots, b_m$: koefisien ruas kanan

1. Metode Simpleks

Menurut B. Susanta (1994), masalah program linear dengan dua variabel atau dengan tiga variabel masih dapat diselesaikan dengan metode grafik. Sedangkan untuk masalah program linear yang memuat tiga variabel atau lebih dapat diselesaikan dengan metode aljabar yang disebut *metode simpleks*. Metode simpleks merupakan metode yang dikenalkan oleh George Dantzig.

Langkah-langkah metode simpleks menurut B. Susanta (1994) adalah :

1. Menyusun tabel awal

Langkah awal metode simpleks adalah mengubah bentuk model masalah program linear ke dalam bentuk kanonik. Pada pola maksimum, kendala utama pada masalah PL dapat berbentuk persamaan dan pertidaksamaan. Dalam mempelajari metode simpleks, diperlukan pengetahuan tentang bentuk kanonik masalah PL dan beberapa variabel yaitu *slack*, *surplus*, dan semu *(artificial)*. Bentuk kanonik pada soal PL merupakan bentuk model PL dengan semua kendala utama berbentuk persamaan. Kendala yang berbentuk pertidaksamaan dapat diubah ke bentuk persamaan dengan menyisipkan suatu variabel. Variabel *slack* akan disisipkan pada ruas kiri jika kendala mempunyai bentuk pertidaksamaan $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j \leq b_i$ dan variabel *surplus* akan disisipkan pada ruas kanan jika kendala mempunyai bentuk pertidaksamaan $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j \geq b_i$. Sedangkan variabel semu *(artificial)* merupakan variabel yang harus bernilai nol untuk kendala utama dalam bentuk persamaan yang belum memiliki variabel basis. Semua kendala utama dengan ruas kanan atau suku tetap b_i harus bernilai positif. Suku tetap yang bernilai negatif harus dikalikan dengan -1. Apabila bentuk kanonik sudah dipenuhi, model PL dimasukkan ke dalam tabel simpleks seperti terlihat pada Tabel 2.1. PL yang sudah diubah dalam bentuk kanonik disusun dalam tabel awal dengan matriks koefisien yang dilengkapi dengan koefisien teknis dan suku tetap harus sudah tersusut Gauss-Jordan dan suku tetap pada ruas kanan harus tidak negatif atau $b_i \geq 0$ untuk semua i.

Sistem Persamaan Linear (SPL) dapat mempunyai satu solusi, banyak solusi, atau tidak punya solusi yang dapat ditandai dengan rank matriks. Rank matriks adalah ukuran terbesar dari matriks bujur sangkar bagian dari A yang determinannya tidak nol. Rank matriks A dilambangkan dengan $r(A)$ (B. Susanta, 1994).

Tabel 2.1 TABEL SIMPLEKS

	c_j	c_1	c_2	...	c_n		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	...	x_m	b_i	R_i
$\bar{c}_1$	$\bar{x}_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1	R_1
$\bar{c}_2$ $\vdots$	$\bar{x}_2$ $\vdots$	a_{21} $\vdots$	a_{22} $\vdots$	...	a_{2n} $\vdots$	b_2 $\vdots$	R_2 $\vdots$
$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m	R_m
	z_j	z_1	z_2	...	z_n	Z	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	...	$z_n - c_n$	Z	

x_j : variabel keputusan

a_{ij} : koefisien teknis

b_i : suku tetap (tak negatif)

c_j : koefisien ongkos

$\bar{x}_i$: variabel basis

$\bar{c}_j$: koefisien ongkos variabel basis

z_j : $\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_i a_{ij}$ (hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan kolom a_{ij})

Z : $\sum_{i=1}^{m} c_i\, b_i$ (hasil kali dari $\bar{c}_i$ dengan b_i

2. Menguji keoptimalan

Langkah ini bertujuan untuk memeriksa penyelesaian yang diperoleh tabel simpleks pada setiap iterasi. Untuk membaca solusi dari masalah program linear atau PLB adalah dengan melihat kolom b_i. Selanjutnya untuk menguji apakah suatu PLB masalah program linear sudah optimal atau belum dapat dilihat dari nilai $z_j - c_j$. Jika nilai $z_j - c_j \geq 0$ PLB sudah optimal dan langkah metode simpleks berhenti. Jika PLB sudah diperoleh namun apabila masih terdapat nilai negatif pada $z_j - c_j$, PLB belum optimal sehingga perlu dilakukan iterasi ulang atau dilakukan perbaikan tabel dengan mengangkat variabel lain yang bukan basis menjadi variabel basis untuk mendapatkan PLB yang optimal.

Masalah PL dengan penyelesaian tak terbatas ditemukan pada nilai koefisien teknis yang dipilih atau yang akan masuk sebagai variabel basis bernilai negatif. Masalah PL dengan penyelesaian tak terbatas kemudian diberhentikan prosesnya karena soal jelas tidak mempunyai penyelesaian optimum.

Masalah PL dikatakan mempunyai solusi lebih dari 1 jika pada tabel PLB optimal terdapat variabel non basis yang nilai $z_j - c_j$ nya adalah nol. Selanjutnya untuk menguji solusi lain, maka variabel non basis yang memiliki nilai $z_j - c_j$ nya nol, dipilih masuk sebagai variabel basis. Masalah PL dikatakan tidak mempunyai solusi atau solusi tidak layak pada tabel PLB optimal jika terdapat variabel semu yang memiliki b_i tidak bernilai nol atau bernilai positif. Masalah PL dikatakan memiliki solusi tunggal jika variabel basisnya sudah bernilai nol. Sedangkan variabel basis di kolom b_i yang bernilai nol, maka PLB yang baru dikatakan merosot atau *degenerate*.

3. Memperbaiki tabel.

Untuk PLB yang belum optimal, PLB yang lebih baik dapat dilakukan dengan mengganti suatu variabel basis dari PLB sebelumnya dengan suatu variabel basis baru. Variabel x_j yang bukan merupakan variabel basis diangkat menjadi variabel basis dengan nilai positif untuk mendapatkan nilai yang optimal. Pemilihan variabel basis x_j yang masuk menjadi basis yaitu dengan melihat $z_j - c_j$ pada tabel yang mempunyai nilai paling kecil. Kolom yang terpilih dinamakan sebagai kolom kunci. Pemilihan variabel basis lama yang harus keluar atau diganti yaitu dengan melihat nilai $R_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$ dengan $a_{ij} > 0$ pada tabel yang mempunyai nilai paling kecil. Baris yang terpilih dinamakan sebagai baris kunci. Nilai unsur kunci yang merupakan perpotongan kolom kunci dan baris kunci harus dibuat sama dengan 1 dan nilai-nilai lainnya pada kolom yang sama harus bernilai nol dengan melakukan beberapa kali operasi baris elementer.

Tabel awal yang memuat PLB dengan $z_j - c_j < 0$ maka tabel masih dapat dibuat lebih maju dengan cara mencari PLB yang baru yang memiliki nilai f lebih besar, atau paling sedikit sama dengan f semula. Nilai f baru akan selalu lebih besar dari nilai f sebelumnya jika tidak terjadi kemerosotan. Dengan mengganti satu basis pada setiap langkahnya, proses memajukan nilai f dapat dilakukan kembali setelah diperoleh PLB baru, kemudian kembali ke langkah dua untuk menguji keoptimalannya. Proses akan berhenti jika kolom-

kolom bukan basis $z_j - c_j \geq 0$ yang berarti bahwa PLB sudah merupakan penyelesaian optimal.

Contoh 2.15

Berikut akan dibahas cara menyelesaikan contoh permasalahan program linear pada dengan metode simpleks dengan langkah-langkah sebagai berikut,

1. Menyusun tabel awal

Untuk menyusun tabel, ubah permasalahan ke bentuk kanonik dengan menambah variabel *slack* pada kendala ke-1 dan pada kendala ke-2 sehingga diperoleh $f = 1000x_1 + 300x_2 + 0s_1 + 0s_2$ dengan kendala,

$2x_1 + 3x_2 + s_1 = 35$

$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 20$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Selanjutnya, bentuk kanonik tersebut dapat dimasukkan ke dalam tabel awal simpleks seperti terlihat pada Tabel 2.2

Tabel 2.2 Tabel awal simpleks

	c_j	1000	300	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	R_i
0	s_1	2	4	1	0	35	
0	s_2	5	2	0	1	20	
	z_j	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-1000	-300	0	0	0	

2. Menguji keoptimalan tabel

Setelah bentuk kanonik dimasukkan ke tabel simpleks seperti terlihat pada tabel 2.2, selanjutnya menghitung nilai z_j yang diperoleh dari perkalian setiap kolom pada variabel terhadap nilai koefisien ongkos variabel basis $\bar{c}_i$. Pada baris z_j dihasilkan semuanya memiliki nilai 0. Selanjutnya menghitung nilai $z_j - c_j$ yaitu pengurangan baris z_j terhadap baris koefisien ongkos c_j.

Tabel 2.3 Tabel uji keoptimalan simpleks iterasi ke-1

	c_j	1000	300	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	R_i
0	s_1	2	4	1	0	35	35/2
0	s_2	5	2	0	1	20	4
	z_j	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-1000	-300	0	0	0	

Terlihat bahwa tabel belum optimal karena nilai pada baris $z_j - c_j$ masih terdapat nilai $z_j - c_j \leq 0$, sehingga tabel harus diperbaiki.

3. Memperbaiki tabel

Tabel yang diperbaiki diawali dengan menentukan variabel non-basis yang akan menjadi variabel basis yang dipilih pada baris nilai $z_j - c_j$ terkecil yaitu -1000 atau variabel x_1. Selanjutnya menentukan variabel basis yang akan keluar dengan melihat kolom nilai R_i terkecil yaitu 4 atau variabel s_2. Pemilihan tersebut menghasilkan unsur kunci bernilai 5, selanjutnya harus dibuat menjadi 1 dan nilai-nilai lain pada kolom yang sama harus dibuat menjadi 0. Hasil perbaikan tabel simpleks pada iterasi kedua diberikan pada Tabel 2.4 dibawah ini.

Tabel 2.4 Tabel uji keoptimalan simpleks iterasi ke-2

	c_j	1000	300	0	0		
$\bar{c}_i$	$\bar{x}_i/x_j$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i	R_i
0	s_1	0	16/5	1	-2/5	35/2	
1000	x_1	1	2/5	0	1/5	4	
	z_j	1000	400	0	200	4000	
	$z_j - c_j$	0	100	0	200	4000	

Tabel simpleks pada iterasi kedua sudah optimal karena memuat baris $z_j - c_j \geq 0$. Penyelesaian optimal tersebut memiliki solusi tunggal yang terlihat pada variabel basis x_1 dan s_1 bernilai 0 pada baris $z_j - c_j$. Diperoleh PLB yaitu $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (4, 0, \frac{35}{2}, 0)$ dan $f = 4000$.

C. Program Linear *Fuzzy*

Permasalahan program linear dalam perkembangannya dapat diaplikasikan dalam lingkungan *fuzzy* yang disajikan dalam bentuk program linear *fuzzy*. Penyelesaian dengan bentuk program linear *fuzzy* merupakan metode optimasi dengan beberapa fungsi tujuan dan fungsi kendala yang dimodelkan dalam himpunan *fuzzy*. Pada program linear *fuzzy*, untuk mencari nilai z yang merupakan fungsi tujuan yang akan dioptimasikan dengan batasan-batasan yang dimodelkan menggunakan himpunan *fuzzy* (Sri Kusumadewi, 2002). Pendekatan dengan teori himpunan *fuzzy* digunakan untuk mengakomodasi tingkat ketidakpastian suatu permasalahan pada dunia nyata.

Bentuk umum model program linear *fuzzy* menurut George J.Klir (1995) adalah,

Memaksimalkan $\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$

dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \,, i = 1, \dots, m$ **(2.12)**

dengan :

x_j : variabel keputusan

$\tilde{a}_{ij}$: koefisien teknis dalam bentuk bilangan *fuzzy*

$\tilde{b}_i$: koefisien ruas kanan dalam bentuk bilangan *fuzzy*

$\tilde{c}_j$: koefisien ongkos dalam bentuk bilangan *fuzzy*

Terdapat banyak bentuk masalah program linear *fuzzy* salah satunya adalah program linear *fuzzy* dengan koefisien teknis kendala berbentuk bilangan *fuzzy*.

Bentuk umum model permasalahan program linear *fuzzy* dengan koefisien teknis kendala berbentuk bilangan *fuzzy* adalah,

Memaksimalkan $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq b_i \,, i = 1, \dots, m$ **(2.13)**

Pada program linear *fuzzy*, koefisien teknis $\tilde{a}_{ij}$ merupakan bilangan *fuzzy*. Setiap bilangan *fuzzy* dengan nilainya yang masih belum pasti, memiliki suatu nilai batas persekitaran $\tilde{a}_{ij}$ yang disebut batas toleransi dan dinotasikan dengan $\tilde{d}_{ij}$.

Berikut akan diberikan contoh bentuk permasalahan program linear *fuzzy* dengan koefisien teknis bilangan *fuzzy*.

Contoh 2.16

Memaksimumkan $f = x_1 + 2x_2$

dengan batasan $\tilde{3}x_1 + \tilde{1}x_2 \leq 4$

$\tilde{5}x_1 + \tilde{2}x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \ \geq 0$

Kedua kendala memiliki toleransi masing-masing $d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 1$, dan $d_4 = 1$. Sehingga permasalahan di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{3} & \tilde{1} \\ \tilde{5} & \tilde{2} \end{bmatrix},\ d_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{1} & \tilde{2} \\ \tilde{1} & \tilde{1} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} + d_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{4} & \tilde{3} \\ \tilde{6} & \tilde{3} \end{bmatrix} \text{ dan } b_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Dalam teori pengambilan keputusan, Bellman dan Zadeh mendefinisikan tiga konsep dasar yaitu *fuzzy goal*, *fuzzy constraint*, dan *fuzzy decision* (Hekmatnia, 2013), yaitu:

1. *Fuzzy Goal* (G), himpunan *fuzzy* yang ditetapkan oleh fungsi keanggotaan:

$$\mu_G(x): X \rightarrow [0,1]$$

   Himpunan *Fuzzy Goal* merupakan himpunan *fuzzy* yang mendefinisikan fungsi tujuannya berbentuk bilangan *fuzzy*.

2. *Fuzzy Constraint* (C), himpunan *fuzzy* yang ditetapkan oleh fungsi keanggotaan:

$$\mu_C(x): X \rightarrow [0,1]$$

Himpunan *Fuzzy Constraint* merupakan himpunan *fuzzy* yang mendefinisikan fungsi kendalanya berbentuk bilangan *fuzzy*.

3. *Fuzzy Decision* (D), himpunan *fuzzy* yang didapatkan dari irisan *fuzzy goal* dan *fuzzy constraint*.

$$\mu_D(x): X \rightarrow [0,1], D = G \cap C,$$

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}$$

Himpunan *Fuzzy Decision* merupakan irisan dari himpunan *fuzzy goal* dan himpunan *fuzzy constraint* yang mendefinisikan hasil dari keputusan *fuzzy*.

Berikut akan diberikan contoh fungsi keanggotaan pada himpunan *fuzzy goal*, *fuzzy constraint* dan fungsi keanggotaan *fuzzy decision*.

Contoh 2.17

Diketahui fungsi *fuzzy goal* sebagai berikut :

$$\mu(G) = \begin{cases} 0; & x \leq 5 \\ \frac{x-5}{5}; & 5 \leq x \leq 10 \\ 1; & x \geq 10 \end{cases}$$

dan fungsi *fuzzy constraint* sebagai berikut :

$$\mu(D) = \begin{cases} 0; & x \leq 6 \\ \frac{x-6}{6}; & 6 \leq x \leq 12 \\ 1; & x \geq 12 \end{cases}$$

dengan demikian, fungsi *fuzzy decision* sebagai berikut,

$$\mu(D) = \begin{cases} 0; & x \leq 5 \\ \min(0, \frac{x-5}{5}) & 5 \leq x \leq 6 \\ \min(\frac{x-5}{5}, \frac{x-6}{6}) & 6 \leq x \leq 10 \\ \min(1, \frac{x-6}{6}) & 10 \leq x \leq 12 \\ 1; & x \geq 12 \end{cases}$$

dan solusi optimal didapatkan yaitu,

$$\max\left(\mu_D(x)\right) = \max(\,0, \min(0, \frac{x-5}{5}), \min(\frac{x-5}{5}, \frac{x-6}{6}), \min\left(1, \frac{x-6}{6}\right), 1) = 1$$